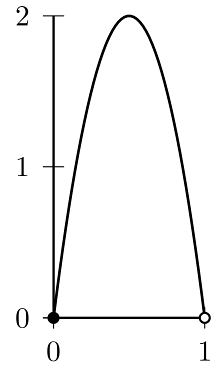
MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 8
11.12.2019

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I" -Bearbeitungsvorschlag-

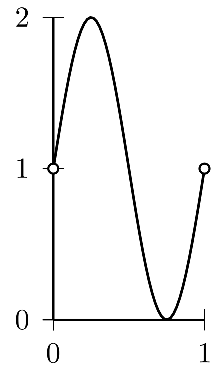
1. a) Der Trick ist, die Funktion den Wert 2 nicht gerade am *Rand* des Definitionsbereichs annehmen zu lassen, also etwa so:



Dies ist im übrigen der Graph der Funktion

$$f : [0,1[\ \longrightarrow \ [0,2], \quad f(x) = 2 - 8 \cdot (x - \frac{1}{2})^2 = 8 \cdot (x - x^2).$$

b) Hier müssen wir die Funktion sowohl den Wert 0 als auch den Wert 2 im Inneren des Definitionsbereichs annehmen lassen:

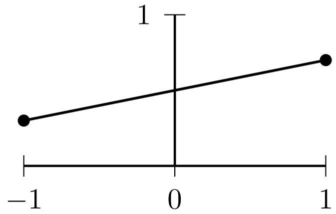


Konkret haben wir hier die Funktion

$$g :]0,1[\ \longrightarrow \ [0,2], \quad g(x) = 1 + \sin(2\pi \cdot x)$$

genommen.

c) Hier kann man die Funktion einfach „genügend viele" Werte (es würde „einer" reichen) aus der Zielmenge gar nicht annehmen lassen:



Hier haben wir die Funktion

$$h : [-1,1] \longrightarrow \,]0,1[\,, \quad h(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{5}$$

genommen (der Nenner 5 wurde gewählt, weil dann das Bild besonders schön wird; im Prinzip funktioniert jeder reelle Nenner > 2).

d) Hier sparen wir uns das Bild, es ist einfach die Strecke vom Punkt $(1,1)$ zum Punkt $(2,3)$. Das heißt, wir nehmen die Abbildung

$$k : [1,2] \longrightarrow [1,3], \quad k(x) = 2x - 1,$$

welche bijektiv ist:
Zunächst einmal ist k „wohldefiniert", d.h. für $x \in [1,2]$ ist $k(x) \in [1,3]$, was hieraus folgt:

$$\begin{aligned} 1 \le x \le 2 \quad &\Longrightarrow \quad 2 \le 2x \le 4 \\ &\Longrightarrow \quad 2-1 \le 2x-1 \le 4-1 \\ &\Longrightarrow \quad 1 \le 2x-1 \le 3 \quad \Longrightarrow \quad k(x) \in [1,3]. \quad \checkmark \end{aligned}$$

k ist bijektiv, denn zu jedem $y \in [1,3]$ gibt es genau ein $x \in [1,2]$ mit $k(x) = y$, was hieraus folgt:

Sei $y \in [1,3]$. Dann gilt für $x \in [1,2]$

$$k(x) = y \iff 2x - 1 = y \iff 2x = y + 1 \iff x = \frac{y+1}{2} \in [1,2]. \quad \checkmark$$

2. a) Beispielsweise ist die Funktion

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(x) = 2x,$$

injektiv, aber nicht surjektiv.

f **injektiv**: Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ (Quelle) mit $f(x_1) = f(x_2)$
$\Longrightarrow\ 2x_1 = 2x_2 \ \Longrightarrow\ x_1 = x_2 \ \checkmark.$

f **nicht surjektiv**: Wähle $y = 1 \in \mathbb{Z}$ (Ziel). Da für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt, daß $f(x)$ gerade, kann es kein $x \in \mathbb{Z}$ geben mit $f(x) = 1$, da 1 ungerade ist. $\checkmark$

b) Beispielsweise ist die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} x - 1 & \text{falls } x \ge 1, \\ x & \text{falls } x \le 0. \end{cases}$$

surjektiv, aber nicht injektiv.

g **nicht injektiv**: Es ist $0, 1 \in \mathbb{Z}$ (Quelle) mit $0 \ne 1$, aber es ist $g(0) = 0 = g(1)$.

g **surjektiv**: Sei $y \in \mathbb{Z}$ (Ziel).

- Falls $y \ge 0$, wähle $x = y + 1$. Dann ist wegen $x \ge 1$ also $g(x) = x - 1 = y + 1 - 1 = y$ $\checkmark$
- Falls $y < 0$, wähle $x = y$. Dann ist wegen $x \le 0$ also $g(x) = x = y$ $\checkmark$

[Eine andere Möglichkeit ist Verwendung des Abrundeoperators; dabei bezeichnet für $a \in \mathbb{R}$ die Zahl $\lfloor a \rfloor$ die größte ganze Zahl $\le a$, also z.B. $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor 2.5 \rfloor = 2$, $\lfloor 2.9 \rfloor = 2$, $\lfloor -2.4 \rfloor = -3$, ...
Die Vorschrift

$$g(x) := \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$$

liefert eine Funktion $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, die surjektiv ist (für jedes $y \in \mathbb{Z}$ ist $g(2y) = y$), jedoch nicht injektiv (es ist z.B. $g(2) = 1 = g(3)$).]

3. a) Die Abbildung

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \Big(x - \frac{1}{3}\Big)^2,$$

ist injektiv, aber nicht surjektiv:

f **injektiv**: Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$, also $(x_1 - \frac{1}{3})^2 = (x_2 - \frac{1}{3})^2$.
$\Longrightarrow \ \big|x_1 - \frac{1}{3}\big| = \big|x_2 - \frac{1}{3}\big|$
$\Longrightarrow \ x_1 - \frac{1}{3} = x_2 - \frac{1}{3} \ \vee \ x_1 - \frac{1}{3} = -(x_2 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} - x_2$
$\Longrightarrow \ x_1 = x_2 \ \vee \ x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$
Letzteres ist aber ausgeschlossen wegen $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$. Also ist $x_1 = x_2$, und das beweist die Injektivität von f.

f **nicht surjektiv**: Für alle $x \in \mathbb{Z}$ ist $f(x) \geq 0$, also wird keine einzige negative Zahl getroffen, d.h. es gibt z.B. kein $x \in \mathbb{Z}$ mit $f(x) = -1$.

b) Die Abbildung

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \Big(x - \frac{1}{3}\Big)^2,$$

ist nicht injektiv und auch nicht surjektiv:

f **nicht injektiv**: Es ist z.B. $0, \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$, $0 \neq \frac{2}{3}$, aber $g(0) = |0 - \frac{1}{3}| = \frac{1}{3} = |\frac{2}{3} - \frac{1}{3}| = g(\frac{2}{3})$.

g **nicht surjektiv**: Siehe Beweis zu a)!

[Wie man auf den Beweis der Nicht-Injektivität kommt? Man werfe einen Blick auf den Beweis der Injektivität in a). Dort sieht man, daß $f(x_1) = f(x_2)$, aber $x_1 \neq x_2$, nur dann passieren kann, wenn $x_1 - \frac{1}{3} = -(x_2 - \frac{1}{3})$, also $x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$ ist. Damit ist unsere Wahl von $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2}{3}$ nicht mehr so überraschend.]

c) Die Abbildung

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad (x, y, z) \longmapsto (xy, yz),$$

ist nicht injektiv, aber surjektiv:

h **nicht injektiv**: Es ist z.B. $h(1, 2, 1) = (1 \cdot 2,\ 2 \cdot 1) \ = \ (2, 2) \ = \ h(2, 1, 2)$.

h **surjektiv**: Sei $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Dann ist mit $(x, y, z) := (a, 1, b) \in \mathbb{N}^3$ dann $h(x, y, z) = (xy, yz) = (a \cdot 1,\ 1 \cdot b) = (a, b)$. ✓

d) Die Abbildung

$$k : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto (x + y, x - y),$$

ist injektiv und surjektiv:

k **injektiv**: Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $k(x_1, y_1) = k(x_2, y_2)$.
$\Longrightarrow \ (x_1 + y_1, x_1 - y_1) \ = \ (x_2 + y_2,\ x_2 - y_2)$
$\Longrightarrow \ x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \ \wedge \ x_1 - y_1 = x_2 - y_2$.

Durch Addition beider Gleichungen folgt nun $2x_1 = 2x_2$, also $x_1 = x_2$, und damit weiter auch $y_1 = y_2$.
Also ist $(x_1, y_1) \ = \ (x_2, y_2)$. ✓

k **surjektiv**: Sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist mit $(x, y) := \big(\frac{1}{2}(a + b),\ \frac{1}{2}(a - b)\big) \in \mathbb{R}^2$ in der Tat

$$k(x, y) = (x{+}y,\ x{-}y) \ = \ \left(\frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(a - b),\ \frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}(a - b)\right) = (a, b). \ ✓$$

[Wie man auf die obige Wahl von $(x,y) := \big(\frac{1}{2}(a+b),\ \frac{1}{2}(a-b)\big)$ kommt? Nun, so:
Sei $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
k(x,y) = (a,b) &\Longrightarrow\ (x+y, x-y) = (a,b) \\
&\Longrightarrow\ x+y = a \ \ \wedge\ \ x-y = b \\
&\Longrightarrow\ 2x = a+b \ \ \wedge\ \ 2y = a-b \qquad \text{(Addition und Subtraktion beider Gleichungen)} \\
&\Longrightarrow\ x = \frac{1}{2}(a+b) \ \ \wedge\ \ y = \frac{1}{2}(a-b) \\
&\Longrightarrow\ (x,y) = \big(\frac{1}{2}(a+b),\ \frac{1}{2}(a-b)\big).
\end{aligned}$$

Obige „Probe“ zeigt dann, daß für dieses $(x,y) = ...$ in der Tat $k(x,y) = (a,b)$ gilt.

Tatsächlich kann man alle obigen Implikationspfeile übrigens auch umdrehen, hat also sogar

$$k(x,y) = (a,b) \iff \ ... \ \iff (x,y) = \big(\frac{1}{2}(a+b),\ \frac{1}{2}(a-b)\big).$$

Damit hätte man die Injektivität und die Surjektivität von k auf einen Schlag gezeigt ($\Longrightarrow$ zeigt, daß k injektiv, $\Longleftarrow$ zeigt, daß k surjektiv.]

Nur die Abbildung k aus d) ist also bijektiv.

4. Wir bezeichnen Elemente von L mit $x_1, x_2, \ldots$, Elemente von M mit $y_1, y_2, \ldots$ und Elemente von N mit $z_1, z_2, \ldots$. (Mathematisch ist eine solche Vereinbarung bedeutungslos, aber sie kann enorm helfen, nicht durcheinanderzukommen!)

   a) Diese Aussage ist **falsch**. Ein Gegenbeispiel ist das folgende: Setze $L = N = \{0\}$ und $M = \mathbb{N}$, also
   $$\{0\} \xrightarrow{g} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \{0\}\,.$$
   Dabei ist egal, welche Abbildung g genommen wird (für f gibt es ohnehin nur eine einzige Möglichkeit: alles geht auf 0). In jedem Fall ist $f \circ g = \mathrm{id}_{\{0\}}$ injektiv (sogar bijektiv), aber f ist nicht injektiv, da etwa $f(1) = 0 = f(2)$ ist.

   b) Diese Aussage ist **wahr**. Zum Beweis seien $x_1, x_2 \in L$ mit $g(x_1) = g(x_2)$. Da wir nur etwas über $f \circ g$ wissen, liegt es nahe, auf die angenommene Gleichheit die Abbildung f anzuwenden: dann folgt also $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$, d.h. $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$. Aber $f \circ g$ ist injektiv, und damit folgt $x_1 = x_2$, was zu zeigen war.

   [Kurz aufgeschrieben so:
   $$\begin{aligned}
   &\text{Seien } x_1, x_2 \in L \text{ und gelte } \ g(x_1) = g(x_2) \\
   &\Longrightarrow\ f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \\
   &\Longrightarrow\ (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \\
   &\overset{f\circ g \text{ injektiv}}{\Longrightarrow}\ x_1 = x_2. \quad \checkmark
   \end{aligned}$$
   ]

   c) Diese Aussage ist **wahr**. Zum Beweis sei $z \in N$ vorgegeben. Wir wissen, dass die Abbildung $f \circ g : L \longrightarrow N$ surjektiv ist; also gibt es ein $x \in L$ mit $z = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Mit $y := g(x)$ ist dann aber $z = f(y)$, d.h. wir haben ein Element von M gefunden, das durch f auf z abgebildet wird. Dies beweist die Surjektivität von f.

   [Kurz aufgeschrieben so:
   $$\begin{aligned}
   &\text{Sei } z \in N \\
   &\overset{f\circ g \text{ surjektiv}}{\Longrightarrow}\ \exists\, x \in L \quad \text{mit} \quad (f \circ g)(x) = z, \quad \text{also } \ f(g(x)) = z \\
   &\Longrightarrow\ f(y) = z \quad \text{mit} \quad y := g(x) \in M. \quad \checkmark
   \end{aligned}$$
   ]

d) Diese Aussage ist **falsch**. Auch hierfür können wir das Gegenbeispiel aus a) betrachten: Denn $f \circ g$ ist bijektiv, also auch surjektiv, jedoch ist $g : \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ nicht surjektiv (da ja nur ein einziges Element von $\mathbb{N}$ getroffen wird).